石墨烯中狄拉克电子在非均匀磁场中的朗道能级
从非均匀磁场中

Aritra Ghosh*
School of Basic Sciences,
Indian Institute of Technology Bhubaneswar,
Jatni, Khurda, Odisha 752050, India
(10Dated: 2025 年 6 月 27 日)

在量子力学中，当带电粒子处于均匀磁场中时，朗道能级的出现是众所周知的。鉴于近年来对石墨烯电子性质的兴趣不断增加，其色散关系在狄拉克点附近与动量呈线性关系，我们重新审视了朗道能级问题，并询问是否存在某些非均匀磁场也能导致由朗道能级组成的谱。我们的答案是肯定的。特别地，通过考虑均匀磁场的同谱变形，我们给出了严格同谱于其均匀对应物的非均匀磁场的具体表达式，从而支持了朗道能级的存在。

I. 介绍

狄拉克方程（例如，参见 [1]）是物理学中的一个非凡方程，并且是 20 世纪最重要的发现之一。尽管它最初被引入是为了处理量子力学的相对论推广，从而自然地引出了自旋、粒子-反粒子对等概念，该系统近年来受到了极大的关注，尤其是在石墨烯的背景下，这是一种二维材料，由一层碳原子构成，在狄拉克点附近，电子色散关系在动量 [2–4] 上呈线性。这种材料由于其特有的色散关系形式而具有迷人的性质，并且缺乏能隙意味着电子特性可以用无质量的狄拉克哈密顿量 [3] 很好地描述。在凝聚态物理学中，对类似狄拉克的哈密顿量的兴趣如此之大，以至于现在将这类具有线性色散关系的系统称为狄拉克材料 [5–9]。还值得一提的是，$(2+1)$ 维的狄拉克哈密顿量一直是几项研究的主题 [10–13]，而狄拉克哈密顿量的一个关键方面在于它与量子光学的联系，因为所谓的狄拉克振子的哈密顿量 [14, 15] 可以映射到描述两能级系统中原子跃迁的 Jaynes-Cummings/反-Jaynes-Cummings 模型 [16, 17]。

在考虑电子性质时，一个重要目标是理解系统（特别是谱）如何受到外加磁场的影响。这自然地引导我们关注凝聚态物理中的有趣现象，如抗磁性、霍尔效应、磁阻等。众所周知，如果对外部的量子自由粒子施加均匀磁场，则朗道能级描述了其谱——这一效果对于解释金属中由于自由电子而产生的抗磁性至关重要，正如朗道 [18] 所述。虽然已经在 [4]（另见 [17]）的统一磁场背景下研究了石墨烯中的朗道能级，但我们现在可以问——是否存在非均匀场配置也能够导致朗道能级？因此，实际上正在寻求的是均匀磁场的等谱变形。虽然有关二维泡利哈密顿量的一些进展已经在 [19] 中报告，但在本工作中，我们将构造推广到适合石墨烯的狄拉克哈密顿量。分析在对称（库仑）规范和非对称（朗道）规范中进行。值得注意的是，先前已有文献报道了关于磁场上作用于石墨烯中的狄拉克电子的一些精确结果 [20, 21]。

在量子力学中寻找同谱哈密顿量的问题是相当古老且已有成熟结果的 [22–36]。事实上，Darboux 的经典结果 [22] 表明，如果 $\mathcal{H}\psi = \mathcal{E}\psi$ 是一个时间无关的薛定谔方程（符号具有熟悉的含义），其中 $\mathcal{H} = -\frac{d^2}{dx^2} + V(x)$（我们将设定 $\hbar = 1$）为势函数 $V(x)$，那么，如果 $\phi(x)$ 是该方程的一个本征值为 ϵ 的特解，则对于 $\mathcal{E} \neq \epsilon$，$\tilde{\psi} = W(\psi,\phi)/\phi$ 是 $\tilde{\mathcal{H}}^\phi \tilde{\psi} = \mathcal{E}\tilde{\psi}$ 的一个解，其中 $\tilde{\mathcal{H}}^\phi = -\frac{d^2}{dx^2} + \tilde{V}^\phi(x)$，并且

$$\tilde{V}^\phi(x) = V(x) - 2\frac{d^2}{dx^2}\ln\phi(x). \tag{1}$$

这里，$W(\psi,\phi)$ 是 Wrönskian，而 $\phi(x)$ 经常被称为“种子”函数。达布构造的一个特殊情形发生在 ϵ 是 $\mathcal{H}$ 的基态能量 $\mathcal{E}_0$ 时，在这种情况下，$\phi(x)$ 必须是基态波函数，即 $\phi(x) = \psi_0(x)$。然后得到了超对称量子力学的框架，在这个框架中，超势定义了一对伙伴势，其中

---

*aritraghosh500@gmail.com

一个为 $V(x)$，另一个为 $\tilde{V}^{\psi_0}(x)$– 两者除了基态 [27] 外具有相同的谱。Darboux 变换也可以用来寻找所谓的有理扩展系统 [30–36]。我们将在这个研究中应用的具体技术可以归因于 Abraham 和 Moses[23]，虽然这与 Darboux 构造不同，但它也与超对称量子力学密切相关。对于一个合适的实常数 λ，这种构造方法导出了新的单参数势函数，其形式为

$$\tilde{V}_\lambda(x) = V(x) - 2\frac{d^2}{dx^2}\ln[J(x)+\lambda], \tag{2}$$

，其中 $J(x) = \int_{-\infty}^{x}\psi_0(x')^2 dx'$。这些势函数与 $V(x)$ 是"严格"同谱的。正如在 [26] 中所强调的那样，Abraham-Moses 构造方法通常给出的结果与 Darboux 构造方法不同；后者一般会从与势函数 $\tilde{V}^{\phi}(x)$ 相关的频谱中"删除"特征值 ϵ。

本文的目的是证明确实存在非均匀磁场，尽管这些磁场在空间上不是常数，但它们可以产生与均匀磁场情况下严格同谱的能级，即朗道能级。鉴于目前对石墨烯和狄拉克/半狄拉克材料 [3–9] 的兴趣，这样的结果预计会有有趣的后果。

II. 磁场所中的狄拉克方程

我们的出发点是二维狄拉克哈密顿量 [1]

$$H = v_F\boldsymbol{\alpha}\cdot(\boldsymbol{p}+\boldsymbol{A}), \tag{3}$$

其中 v_F 是费米速度而 $\boldsymbol{A}=(A_x,A_y)$ 是矢势，磁场定义为 $B_z = \frac{\partial A_y(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial A_x(x,y)}{\partial y}$。请注意我们取电子电荷为 '$-1$' 对应于一个电子。取 $\alpha_x=\sigma_x$ 和 $\alpha_y=\sigma_y$，Dirac 哈密顿量可以表示为

$$H = \begin{pmatrix} 0 & v_F(\mathcal{P}^*+\mathcal{A}^*(\boldsymbol{r})) \\ v_F(\mathcal{P}+\mathcal{A}(\boldsymbol{r})) & 0 \end{pmatrix}, \tag{4}$$

其中我们定义了 $\mathcal{P} = p_x + ip_y$ 和 $\mathcal{A}(\boldsymbol{r}) = A_x(\boldsymbol{r}) + iA_y(\boldsymbol{r})$，且 $\boldsymbol{r}=(x,y)$。现在，假设狄拉克波函数的形式由

$$\Psi = \begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\end{pmatrix}, \tag{5}$$

给出，其中 $\psi_{1,2}=\psi_{1,2}(x,y)$，方程 $H\Psi=E\Psi$ 给出了

$$v_F(\mathcal{P}^*+\mathcal{A}^*(\boldsymbol{r}))\psi_2(\boldsymbol{r}) \;=\; E\psi_1(\boldsymbol{r}), \tag{6}$$

$$v_F(\mathcal{P}+\mathcal{A}(\boldsymbol{r}))\psi_1(\boldsymbol{r}) \;=\; E\psi_2(\boldsymbol{r}). \tag{7}$$

结合这两个结果，我们得到

$$v_F^2\big[(\mathcal{P}+\mathcal{A}(\boldsymbol{r}))(\mathcal{P}^*+\mathcal{A}^*(\boldsymbol{r}))\big]\psi_2(\boldsymbol{r}) = E^2\psi_2(\boldsymbol{r}). \tag{8}$$

我们可以将 ψ_2 称为波函数，尽管一旦它被确定，从方程 (6) 中很容易找到 ψ_1。现在，对于方程 (8)，直接计算给出

$$\begin{aligned}&\Big[p_x^2+p_y^2+A_x^2+A_y^2+2(A_xp_x+A_yp_y)\\ &\quad+(p_xA_x)+(p_yA_y)+i(p_yA_x)-i(p_xA_y)\Big]\psi_2(x,y)\\ &=\left(\frac{E^2}{v_F^2}\right)\psi_2(x,y).\end{aligned} \tag{9}$$

上述方程具有形式 $\mathcal{K}\psi_2=\mathcal{E}\psi_2$，其中 $\mathcal{E}=(E/v_F)^2$ 和 $\mathcal{K}=p_x^2+p_y^2+A_x^2+A_y^2+2(A_xp_x+A_yp_y)+(p_xA_x)+(p_yA_y)+i(p_yA_x)-i(p_xA_y)$ 被称为拟哈密顿量 [37]。在下面的内容中，我们将依次讨论对称和非对称规范选择以寻找均匀磁场的等谱变形。

III. 对称规范

A. 均匀磁场

对于均匀磁场，可以选择对称规范，取 $A_x=-By$ 和 $A_y=Bx$，得到 $B_z=2B$。因此，方程 (9) 变为

$$\left[-\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)+B^2(x^2+y^2)+2BL_z-2B\right]\psi_2(x,y) = \left(\frac{E^2}{v_F^2}\right)\psi_2(x,y), \tag{10}$$

其中我们使用了 $p_x=-i\frac{\partial}{\partial x}$ 和 $p_y=-i\frac{\partial}{\partial y}$。在上述方程中，我们有 $L_z=xp_y-yp_x$ 作为轨道角动量。注意左侧的最后一项是自旋场相互作用项（'-1' 方向来自泡利矩阵 σ_z 的负号对于 ψ_2）。在极坐标系中查看该方程 (r,θ) 是

很方便的；取试探解 $\psi_2(r,\theta)=e^{im_l\theta}\rho(r)$，我们得到

$$-\frac{d^2\rho(r)}{dr^2}-\frac{1}{r}\frac{d\rho(r)}{dr}+\left[B^2r^2+\frac{m_l^2}{r^2}+2Bm_l-2B\right]\rho(r)=\left(\frac{E^2}{v_F^2}\right)\rho(r). \tag{11}$$

定义 $\chi(r)=\sqrt{r}\rho(r)$，可以进一步得到简化后的方程

$$-\frac{d^2\chi(r)}{dr^2}+\left[B^2r^2+\frac{m_l^2-\frac{1}{4}}{r^2}\right]\chi(r)=\frac{[E^2-2Bm_lv_F^2+2Bv_F^2]}{v_F^2}\chi(r). \tag{12}$$

上述类似薛定谔方程的结构与在各向同性势能 [38] 中运动的粒子相同，并且可以通过精确求解给出（详见 [39–41]）以下结果：

$$\chi_{n,m_l}(r)\sim r^{|m_l|+\frac{1}{2}}e^{-\frac{Br^2}{2}}{}_1F_1(-n,|m_l|+1,Br^2),\qquad E_n^2=2Bv_F^2(2n+m_l+|m_l|), \tag{13}$$

其中 $n=0,1,2,\cdots$ 和 $m_l=0,\pm1,\pm2,\cdots$。这里，${}_1F_1(\cdot,\cdot,\cdot)$ 是可以通过使用恒等式

$${}_1F_1(-n,|m_l|+1,Br^2)=\frac{\Gamma(n+1)\Gamma(|m_l|+1)}{\Gamma(|m_l|+n+1)}L_n^{|m_l|}(Br^2), \tag{14}$$

表示为关联拉盖尔多项式 $L_n^{\alpha_0}(x)$ 的合流超几何函数，其中 $\Gamma(\cdot)$ 是欧拉伽马函数。完整的波函数表示为 $\psi_{2,n,m_l}(r,\theta)=r^{-1/2}e^{im_l\theta}\chi_{n,m_l}(r)$，它们的正交性直接来自于关联拉盖尔多项式的正交性。E^2 的谱是等间距的；这些就是我们将提到的狄拉克系统的朗道能级。允许的能量是 $E_n=\pm\sqrt{2B(2n+m_l+|m_l|)}v_F$。一个值得特别注意的情况是 $m_l=0$，在这种情况下，合流超几何函数可以用“简单”的拉盖尔多项式 $L_n^0(x)$ 来表示。对于 $n=0$，我们得到 $L_0^0=1$，这意味着基态波函数由 $\psi_{2,0,0}(r)\sim e^{-\frac{Br^2}{2}}$ 给出，与 $\psi_{2,0,m_l}(r)$ 对于 $m_l\neq0$ 不同，它在 $r\to0$ 时不消失。这可以从以下事实解释：对于 $m_l=\pm1,\pm2,\cdots$，有 $m_l^2>1/4$，表明方程（12）中的 $1/r^2$ 项是排斥的（以 $r=0$ 为中心），而对于 $m_l=0$，方程（12）中的相同项变为吸引的。

B. 非均匀磁场

关于非均匀磁场，我们取矢量势的分量如下形式：$A_x(x,y)=-Byf(r)$ 和 $A_y(x,y)=Bxf(r)$，其中 $r=\sqrt{x^2+y^2}$ 是径向变量。直接计算表明方程 (9) 具有以下形式：

$$\left[-\nabla^2+r^2B^2f(r)^2+2Bf(r)L_z-2Bf(r)-rBf'(r)\right]\psi_2(r,\theta)=\left(\frac{E^2}{v_F^2}\right)\psi_2(r,\theta). \tag{15}$$

定义 $\psi_2(r,\theta)=r^{-1/2}e^{im_l\theta}\chi(r)$，得到

$$-\frac{d^2\chi(r)}{dr^2}+\left[B^2r^2f(r)^2+\frac{m_l^2-\frac{1}{4}}{r^2}+2Bf(r)m_l-2Bf(r)-rBf'(r)\right]\chi(r)=\left(\frac{E^2}{v_F^2}\right)\chi(r). \tag{16}$$

我们现在可以利用超对称因子分解。验证对于 $m_l\leq0$，上述方程的左侧可以通过定义

$$\mathcal{A}_{m_l}=\frac{d}{dr}+Brf(r)-\frac{|m_l|+\frac{1}{2}}{r}. \tag{17}$$

表示为 $\mathcal{A}_{m_l}^\dagger\mathcal{A}_{m_l}$ 是一个简单的练习。基态本征函数可以直接计算；使用 $\mathcal{A}_{m_l}\chi_{0,m_l}(r)=0$ 进行积分得到

$$\chi_{0,m_l}(r)\sim r^{|m_l|+\frac{1}{2}}e^{-\int^r Br'f(r')dr'}, \tag{18}$$

波函数为 $\psi_{2,0,m_l}(r,\theta)=r^{-1/2}e^{im_l\theta}\chi_{0,m_l}(r)$。我们将使用基态本征函数一词表示 $\chi_{0,m_l}(r)$，而基态波函数则指代 $\psi_{2,0,m_l}=r^{-1/2}e^{im_l\theta}\chi_{0,m_l}(r)$。类似的术语将在第

(IV) 节的非对称规范中使用。请注意，每个 m_l 表示一个不同的基态本征函数，这由条件 $\mathcal{A}_{m_l}\chi_{0,m_l}(r)=0$ 决定，其中算子 A_{m_l} 明确依赖于 m_l。在上述构造中，我们可以将依赖于 m_l 的超势识别为

$$W_{m_l}(r)=Brf(r)-\frac{|m_l|+\frac{1}{2}}{r}, \tag{19}$$

，并且这导致了一个一维的时间独立 Schrödinger 型方程（16），其标量势为

$$\begin{aligned} V_{m_l}(r) \;=\; & B^2r^2f(r)^2+\frac{m_l^2-\frac{1}{4}}{r^2} \\ & +2B\left(f(r)m_l-f(r)-\frac{rf'(r)}{2}\right). \end{aligned} \tag{20}$$

。

现在，对于一般的 $f(r)$ 以及由此得到的 $V_{m_l}(r)$，Abraham-Moses 的结果(2)给出了一个严格等谱势族，形式为

$$\tilde{V}_{m_l,\lambda}(r)=V_{m_l}(r)-2\frac{d^2}{dr^2}\ln[J_{m_l}(r)+\lambda], \tag{21}$$

，其中 $J_{m_l}(r)=\int_0^r\chi_{0,m_l}(r')^2dr'$，而 $\chi_{0,m_l}(r)$ 是对应于给定的 m_l 的基态本征函数(18)。这里，实参数 λ 参数化严格等谱势能族 $\tilde{V}_{m_l,\lambda}(r)$。利用这个众所周知的结果，直接计算表明对于给定的值 m_l 和描述矢量势的一个函数 $f(r)$，一个严格等谱族 $f_{m_l,\lambda}(r)$ 给出为

$$Bf_{m_l,\lambda}(r)=Bf(r)+\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\ln[J_{m_l}(r)+\lambda]. \tag{22}$$

因此，简单来说，从一个磁场 B_z 和给定的值 m_l 开始，导致相同量子谱的磁场族给出为

$$(B_z)_{m_l,\lambda}(r)=B_z(r)+\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{d}{dr}\ln[J_{m_l}(r)+\lambda]\right). \tag{23}$$

在二维 Pauli 哈密顿量的背景下，同样的结果是在 [19] 中获得的。我们的第一个结果可以陈述如下：

结果 1 *一个支持朗道能级的非均匀磁场的两参数族由以下给出：*

$$\begin{aligned} (B_z)_{m_l,\gamma}(r)=2B &+\frac{r^{2|m_l|}e^{-Br^2}}{\gamma+\int_0^r r'^{2|m_l|+1}e^{-Br'^2}dr'} \\ &+\frac{d}{dr}\left(\frac{r^{2|m_l|+1}e^{-Br^2}}{\gamma+\int_0^r r'^{2|m_l|+1}e^{-Br'^2}dr'}\right), \end{aligned} \tag{24}$$

其中 γ 是一个合适的实常数，其他符号具有它们通常的意义。

证明 – 我们感兴趣的朗道量子化，我们将取 $f(r)=1$，得到 $B_z=2B$，对应方程（12）的情况。由于 $f(r)=1$，基态本征函数 $\chi_{0,m_l}(r)$ 可以从 (18) 得到为

$$\chi_{0,m_l}(r)=N_{m_l}r^{|m_l|+\frac{1}{2}}e^{-\frac{Br^2}{2}}, \tag{25}$$

其中 N_{m_l} 是一个归一化因子。这与结果 (13) 的 $n=0$ 情况相符。从结果 (22) 立即得出

$$f_{m_l,\lambda}(r)=1+\frac{1}{B}\frac{N_{m_l}^2r^{2|m_l|}e^{-Br^2}}{\lambda+N_{m_l}^2\int_0^r r'^{2|m_l|+1}e^{-Br'^2}dr'}, \tag{26}$$

，其中下标 m_l 明确表示该结果是为特定的 m_l 获得的。由此得出非均匀磁场允许 E^2 具有等间距谱（对于选定的 m_l）。直接计算验证了结果 (24) 与 $\gamma=\lambda/N_{m_l}^2$。

此外，我们得到了结果

$$\begin{aligned} &\int_0^r r'^{2|m_l|+1}e^{-Br'^2}dr' \\ &=\frac{r^{2|m_l|}}{2B(Br^2)^{|m_l|}}\left[\Gamma(|m_l|+1)-\Gamma(|m_l|+1,Br^2)\right], \end{aligned} \tag{27}$$

其中 $\Gamma(\cdot)$ 是在恒等式 (14) 中较早出现的欧拉伽玛函数，而 $\Gamma(\cdot,\cdot)$ 是上不完全伽玛函数。利用这一点，可以对非均匀磁场 (24) 进行解析评估。磁场的变化 (24) 在图 (1) 中得到了说明，这清楚地展示了其空间分布。对于较大的 r，它收敛到均匀场 $B_z=2B$，并且 $|m_l|$ 的值越小，这种收敛就越快。

必须强调的是，算子 $\mathcal{A}_{m_l}$ 及其共轭涉及量子数 m_l。这意味着 $\mathcal{A}_{m_l}^\dagger\mathcal{A}_{m_l}$（或 $\mathcal{A}_{m_l}\mathcal{A}_{m_l}^\dagger$）的谱由量子数 n 标记，但 m_l 固定。虽然这表明我们仅获得了部分谱（对于给定的 m_l），值得注意的是，对于 $m_l\leq 0$，由均匀磁场 $2B$ 引起的谱 (13) 是 $E_n^2=4Bnv_F^2$，与 m_l 无关。然而，对于每个 A_{m_l}，方程 (17) 定义了一个依赖于 m_l 的基态本征函数，并且非均匀磁场 (24) 是依赖于 m_l 的。如 [19] 所示，上述非均匀磁场与它们的均匀对应物具有相同的磁通量。

IV. 非对称（朗道）规范

我们取不对称规范，其中 $A_x=0$ 和 $A_y=A_y(x)$，给出 $B_z=\frac{\partial A_y(x)}{\partial x}$。在这种情况下，取狄拉克波函数的

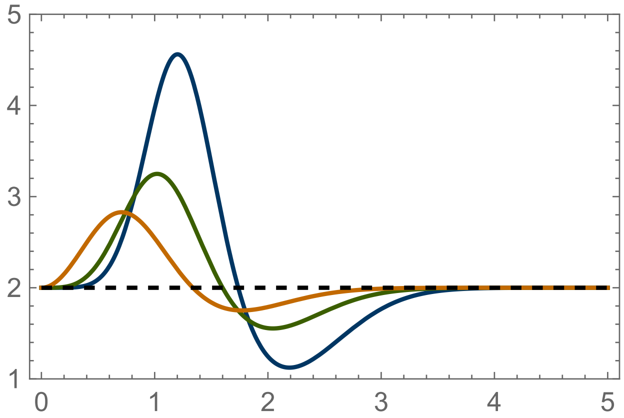

图 1: $(B_z)_{m_l,\gamma}(r)$ 的空间分布，与均匀场 $B_z = 2B$ 同谱，作为 r 的函数对于 $B=1$,$\gamma=1$，在取 $m_l=-1$（橙色）、$m_l=-2$（绿色）和 $m_l=-3$（蓝色）时的情况。黑色虚线表示均匀场 $B_z=2B$。

形式为

$$\Psi = e^{iky}\begin{pmatrix}\psi_1\\ i\psi_2\end{pmatrix}, \tag{28}$$

其中 $\psi_{1,2}=\psi_{1,2}(x)$，狄拉克方程 $H\Psi=E\Psi$ 变为

$$v_F\left[\frac{d}{dx}+k+A_y(x)\right]\psi_2(x) = E\psi_1(x), \tag{29}$$

$$v_F\left[-\frac{d}{dx}+k+A_y(x)\right]\psi_1(x) = E\psi_2(x). \tag{30}$$

将这些组合起来，对于 ψ_2，得到以下方程：

$$\left[-\frac{d^2}{dx^2}+[k+A_y(x)]^2-\frac{dA_y(x)}{dx}\right]\psi_2(x) = \left(\frac{E^2}{v_F^2}\right)\psi_2(x), \tag{31}$$

其左边可以因式分解为 $\mathcal{A}_k^\dagger\mathcal{A}_k$，其中

$$\mathcal{A}_k = \frac{d}{dx}+k+A_y(x). \tag{32}$$

基态获得为 $\mathcal{A}_k\psi_{2,0,k}=0$，形式上给出

$$\psi_{2,0,k}(x) \sim e^{-\int^x(k+A_y(x'))dx'}, \tag{33}$$

其中下标 k 表示波函数通过 $\mathcal{A}_k$ 对 k 的显式依赖来表示的 k 依赖性。方程 (31) 可以解释为一个具有有效势能

$$V_k(x) = [k+A_y(x)]^2-\frac{dA_y(x)}{dx}. \tag{34}$$

的时间独立薛定谔型方程。我们现在可以讨论朗道能级。

A. 朗道能级

我们取 $A_y(x)=Bx$。这蕴含了 $B_z=B$，且方程 (31) 变为

$$\left[-\frac{d^2}{dx^2}+B^2\left(x+\frac{k}{B}\right)^2\right]\psi_2(x) = \left(\frac{E^2}{v_F^2}+B\right)\psi_2(x), \tag{35}$$

其结构与谐振子的时间无关薛定谔方程相同。因此，可以求解得到

$$\psi_{2,n,k}(x) \sim e^{-\frac{B(x+k/B)^2}{2}}H_n(Bx+k), \qquad E_n^2 = 2Bv_F^2 n, \tag{36}$$

，其中 $n=0,1,2,\cdots$ 和 k 可以连续变化。这给出了朗道能级 $E_n=\pm\sqrt{2Bn}v_F$。

B. 非均匀场中的朗道能级

现在可以展示一组严格等谱的磁场，这是我们第二个结果。以下是正确的：

结果 2 一个支持朗道能级的非均匀磁场的两参数族由

$$(\tilde{B}_z)_{k,\delta}(x) = B-\frac{d}{dx}\left(\frac{2(Bx+k)e^{-B\left(x+\frac{k}{B}\right)^2}}{\delta+\int_{-\infty}^{x}e^{-B\left(x'+\frac{k}{B}\right)^2}dx'}\right) \tag{37}$$

给出，其中 δ 是一个合适的实常数，其他符号具有它们通常的意义。

证明 – 利用 Abraham-Moses 结果 (2) 并从势能 (34) 开始，可以得到一组严格等谱的势能作为

$$\tilde{V}_{k,\lambda}(x) = V_k(x)-2\frac{d^2}{dx^2}\ln[J_k(x)+\lambda], \tag{38}$$

其中 $J_k(x)=\int_{-\infty}^{x}\psi_{2,0,k}(x')^2dx'$。调用方程 (34)，直接计算显示我们得到了一组向量势能如下：

$$(\tilde{A}_y)_{k,\lambda}(x) = A_y(x)+\frac{d}{dx}\ln[J_k(x)+\lambda]. \tag{39}$$

这些势能定义了一组严格等谱的磁场。牢记 Landau 能级的问题，因此采用 $A_y(x)=Bx$，最终得到我们的结果 (37)，通过将 $\psi_{2,0,k}(x)=N_k e^{-\frac{B(x+k/B)^2}{2}}$ 作为归一化因子 N_k 来表达 $\delta=\lambda/N_k^2$。磁场的变化 (37) 如图 (2) 所示，清晰地显示了其空间分布。对于大的 $|x|$，它收敛到均匀场 $B_z=B$。

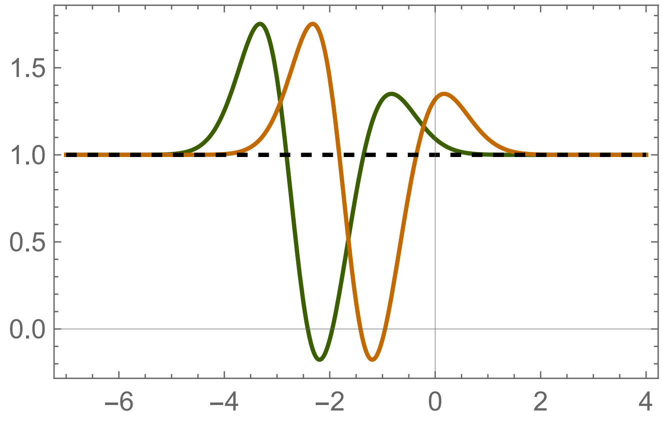

图 2: 空间分布 $(B_z)_{m_l,\delta}(x)$，其同谱于均匀场 $B_z = B$，作为 x 的函数对于 $B = 1$，$\delta = 1$，在取 $k = 1$（橙色）和 $k = 2$（绿色）时。黑色虚线表示均匀场 $B_z = B$。

V. 讨论

当带电量子粒子施加均匀磁场时出现朗道能级是众所周知的。在前文分析中，我们描述了如何获得严格等谱于均匀磁场情况的非均匀磁场。聚焦于石墨烯，我们在不对称和对称规范选择下找到了导致朗道能级的非均匀磁场表达式。这些能级在顺磁性和其他磁现象的背景下具有研究价值。

总结，在对称规范下，引入极坐标 (r, θ) 以及径向波函数 $\rho(r) = r^{-1/2}\chi(r)$ 的进一步变换是方便的，这将问题映射到一个具有所需谱的“有效”方程（16）对于 E^2；在此基础上我们应用了超对称分解和 Abraham-Moses 的结果（2）。因此，所谓的波函数 $\chi_{n,m_l}(r)$ 具有基态归一化因子 N_{m_l}，与真实的波函数 $\psi_{2,n,m_l}(r,\theta) = r^{-1/2}e^{-im_l\theta}\chi_{n,m_l}(r)$ 不同。专注于 $m_l \leq 0$，对于每个 $m_l = 0, -1, -2, \cdots$，我们发现存在不同的非均匀磁场（24）支持朗道能级。每个 m_l 都有一个由 A_{m_l} 确定的独特基态本征函数。$m_l = 0$ 的情况是特殊的，因为基态波函数在 $r \to 0$ 时不消失，这在恒等式（14）下面的一段中进行了讨论。从结果（24）可以很容易地看出，对于 $m_l = -1, -2, \cdots$，$\lim_{r\to 0}(B_z)_{m_l<0,\gamma}(r) = \lim_{r\to\infty}(B_z)_{m_l<0,\gamma}(r) = 2B$，我们有 $m_l = 0$，$\lim_{r\to\infty}(B_z)_{m_l=0,\gamma}(r) = 2B$ 但是 $\lim_{r\to 0}(B_z)_{m_l=0,\gamma}(r) = 2(B + \gamma^{-1})$，这一观察也在 [19] 中被指出。

从对称规范的结果来看，很容易观察到它们依赖于 k，其中 k 是 y 方向上的动量量子数（连续）。虽然 k 不影响谱，但它出现在基态波函数（33）中，因此，k 参数化了支持朗道能级的非均匀磁场族（37）。我们必须注意到，E^2 级的能谱在两种情况下是相同的（如预期），因为对于 $m_l \leq 0$，我们从 (13) 得到，在均匀磁场 $B_z = 2B$ 下的级别为 $E_n^2 = 4Bnv_F^2$，这相当于在 (36) 中对于均匀磁场 $B_z = B$ 下获得的 $E_n^2 = 2Bnv_F^2$。值得注意的是，我们的分析揭示了与原始 Abraham-Moses 结果（2）中势的一个参数族相比，磁场所具有的两个参数族，并且 m_l 或 k 的出现是由于将二维问题简化为一维问题所致。

最后，让我们指出尽管我们的讨论中心是石墨烯或任何其他“无隙”的狄拉克材料，但我们的结果可以经过简单的修改应用于具有非零质量/间隙的相对论量子力学，并且这些技术也可以应用到非相对论量子力学中。因此，当前分析相当普遍，预计在涉及磁场的各种量子力学问题中都是相关的。让我们在此结束时指出，根据 [28]，可以找到支持朗道能级的多参数非均匀磁场族；然而，我们在这里不会进一步探讨这一点。

致谢：作者感谢 C. Nagaraja Kumar 进行了富有洞察力的讨论，并对帕尼尔大学物理学系的热情接待表示感激，在那里开始了这项工作。还承认与 Akash Sinha、Bijan Bagchi 和 Bhabani Prasad Mandal 的有益讨论。作者感谢 Akash Sinha 在准备图表方面的帮助。

[1] L. I. Schiff, *Quantum Mechanics*, McCraw-Hill (New York) (1955).
[2] P. R. Wallace, Phys. Rev. **71**, 622 (1947).
[3] A. H. Castro Neto, F. Guinea, N. M. R. Peres, K. S.

Novoselov, and A. K. Geim, Rev. Mod. Phys. **81**, 109 (2009).

[4] M. O. Goerbig, Rev. Mod. Phys. **83**, 1193 (2011).

[5] T. O. Wehling, A. M. Black-Schaffer, and A. V. Balatsky, Adv. Phys. **63**, 1 (2014).

[6] J. Cayssol, C. R. Phys. **14**, 760 (2013).

[7] C. Zhong, Y. Chen, Y. Xie, Y.-Y. Sun, and S. Zhang, Phys. Chem. Chem. Phys. **19**, 3820 (2017).

[8] M. D. Uryszek, E. Christou, A. Jaefari, F. Krüger, and B. Uchoa, Phys. Rev. B **100**, 155101 (2019).

[9] D. Asafov and and I. Pavlov, Phys. Rev. B **110**, 125126 (2024).

[10] S.-H. Dong, X.-W. Hou, and Z.-Q. Ma, Phys. Rev. A **58**, 2160 (1998).

[11] S.-H. Dong and Z.-Q. Ma, Phys. Lett. A **312**, 78 (2003).

[12] Y. Sucu and N. Ünal, J. Math. Phys. **48**, 052503 (2007).

[13] L. Menculini, O. Panella, and P. Roy, Phys. Rev. D **87**, 065017 (2013).

[14] D. Itô, K. Mori, and E. Carriere, Nuovo Cimento A **51**, 1119 (1967).

[15] M. Moshinsky and A. Szczepaniak, J. Phys. A: Math. Gen. **22**, L817 (1989).

[16] A. Bermudez, M. A. Martin-Delgado, and E. Solano, Phys. Rev. A **76**, 041801(R) (2007).

[17] B. P. Mandal and S. Verma, Phys. Lett. A **374**, 1021 (2010).

[18] L. D. Landau, Z. Phys. A **64**, 629 (1930).

[19] A. Khare and C. N. Kumar, Mod. Phys. Lett. A **08**, 523 (1993).

[20] Ş. Kuru, J. Negro, and L. M. Nieto, J. Phys.: Condens. Matter **21**, 455305 (2009).

[21] M. Castillo-Celeita and D. J. Fernández C., J. Phys. A: Math. Theor. **53**, 035302 (2020).

[22] G. Darboux, C. R. Acad. Sci. (Paris) **94**, 1456 (1882).

[23] P. B. Abraham and H. E. Moses, Phys. Rev. A **22**, 1333 (1980).

[24] B. Mielnik, J. Math. Phys. **25**, 3387 (1984).

[25] M. M. Nieto, Phys. Lett. B **145**, 208 (1984).

[26] M. Luban and D. L. Pursey, Phys. Rev. D **33**, 431 (1986).

[27] A. Khare and U. Sukhatme, J. Phys. A: Math. Gen. **22**, 2847 (1989).

[28] W.-Y. Keung, U. P. Sukhatme, Q. Wang, and T. D. Imbo, J. Phys. A: Math. Gen. **22**, L987 (1989).

[29] B. Bagchi and R. Roychoudhury, J. Phys. A: Math. Gen. **33**, L1 (2000).

[30] D. Gómez-Ullate, N. Kamran, and R. Milson, J. Phys. A: Math. Gen. **37**, 10065 (2004).

[31] C. Quesne, J. Phys. A: Math. Theor. **41**, 392001 (2008).

[32] J. F. Cariñena, A. M. Perelomov, M. F. Rañada, and M. Santander, J. Phys. A: Math. Theor. **41**, 085301 (2008).

[33] B. Bagchi and C. Quesne, J. Phys. A: Math. Theor. **43**, 305301 (2010).

[34] Y. Grandati, Ann. Phys. (N.Y.) **326**, 2074 (2011).

[35] D. Gómez-Ullate, Y. Grandati, and R. Milson, J. Phys. A: Math. Theor. **47**, 015203 (2014).

[36] R. K. Yadav, S. Banerjee, N. Kumari, A. Khare, and B. P. Mandal, Ann. Phys. (N.Y.) **436**, 168679 (2022).

[37] B. Bagchi and R. Ghosh, J. Math. Phys. **62**, 072101 (2021).

[38] Y. Weissman and J. Jortner, Phys. Lett. A **70**, 177 (1979).

[39] I. I. Gol'dman and V. D. Krivchenkov, *Problems in Quantum Mechanics*, Pergamon Press (London) (1961).

[40] A. Ghosh and A. Sinha, J. Phys.: Conf. Ser. **2986**, 012004 (2025).

[41] A. Ghosh and B. P. Mandal, Phys. Lett. A **545**, 130488 (2025).