

自由州的自由选举： 新罕布什尔州重新划分选区的综合分析

Atticus McWhorter^{1*} and Daryl DeFord²

¹Department of Mathematics, Dartmouth College.

²Department of Mathematics and Statistics, Vassar College.

*Corresponding author(s). E-mail(s):
atticus.w.mcwhorter.gr@dartmouth.edu;

摘要

新罕布什尔州的立法重新划区过程，以及全国各地许多其他州，在 2020 年人口普查周期中尤其具有争议性。在本文中，我们介绍了对实施中的选区进行的综合分析，以提供关于这些地图在诉讼过程中所作声明的数学背景。通过操作化新罕布什尔州重新划区规则并算法生成大量划分计划，使我们能够构建该州预期行为的基础线，并评估非党派理由以及划分标准和党派结果之间的地理权衡。此外，我们的结果显示了选举数据的选择和聚合对分析政党对称度量的影响。

Keywords: 计算重划区，马尔可夫链蒙特卡罗，集成分析，生成树，新罕布什尔州

1 介绍

尽管自 20 世纪 60 年代以来，就已经应用计算方法来优化多准则的政治区划方案 [1]，但数据可用性和计算能力的最新进展为分析已实施和拟议的地图创造了新的工具，并带来了新的挑战。在本文中，我们将这些现代技术之一——集合方法 [2]——应用于创建并分析新罕布什尔州选区的一大批区划方案。这种方法使我们能够在广泛的指标范围内为每种类型的区划制定合理的基线值，同时直接纳入该州的政治地理和立法限制。

个体的紧凑性数值测量长期以来被用于检测党派划分选区的行为，遵循这样的直觉：为了实现不正当的党派目标，需要扭曲和扰乱选区边界使其偏离规则或平滑的形状。基于形状的计算示例包括等周比率，在这个领域被称为 Polsby-Popper 分数，或者 Reock 分数，它衡量的是选区与其外接圆之间的比例。这些指标最近被批评 [3-5] 无法检测现代的划分选区行为。北卡罗来纳州在上一个周期内的国会地图提供了这个问题的一个实例，因为一张特别不紧凑的地图被认为违宪 [6] 并被替换为具有类似党派属性但形状测量表现显著更好的地图 [7, 8]。

同样，许多测量方法被提出用于直接评估选区划分计划的政党公平性，而无需考虑选区的形状。这些包括政党对称性的衡量标准 [9, 10]，以及效率差距 [11-13]、偏差 [14, 15]、政党错位 [16, 17] 和其他最近的地缘扩展 [18, 19]，以及 GEO 指标 [20]。这些衡量标准通常隐含了特定的，有时是相互矛盾的公平规范定义和理想值，但仅依靠这类单一测量来定义一个公平计划可能会导致非直观的结果 [21, 22]。

即使简单的比例性措施也可能无法实现，即使法院没有要求或支持这样做。例如，在马萨诸塞州的几次选举中，共和党选票份额约为 30%，但由于党派分布的同质性 [23]，单一成员区系统需要产生一个不选出任何共和党代表的结果。不过，最近对“投票自由测试”的分析表明，以比例基线 [24] 为标准可能具有一定的优势。

集成方法试图通过在区划计划的形成过程中明确考虑特定州的政治地理来解决这个问题。通过创建一个从大量可能性中抽取的地图集合，可以为应用于任何具体地图的度量值提供背景。例如，如果应用到已实施地图上的某个度量值位于来自中立集成分布极尾部分，则这提供了关于划线意图的证据 [8]。在过去十年中，这些集成方法在涉及政治重新划分的法庭案件和改革努力中变得越来越重要。全国各地的州法院已经听取了关于集合的证词，并且许多现任最高法院大法官已经批准了它们在各种应用中的使用。例如，在 *Rucho v. Common Cause* 的异议意见中，Kagan 大法官认为创建集成将有助于确定一张地图是否符合宪法 [25]，正如 [26] 所指出的那样，这些方法已经被广泛使用。

集成方法在分析国家级代表性机构和州立法机构 [8, 27-32] 方面都取得了广泛的成功。特别是在 *Rucho v. Common Cause* 案件裁定党派划分选区不是可诉问题之后，州级法院在评估立法地图的过程中扮演了越来越重要的角色，从而引起了更多的关注。

在最近对新罕布什尔州参议院和执行委员会选区的法庭挑战中，没有使用集合分析来支持对已实施计划 [33] 的定量度量（如对称性、紧凑性和公平性）的评估。原告确实认为，将左倾城市集中在一起形成畸形选区是为了在该州其他地区增加共和党代表的数量。此外，诉讼未提供关于选民波动对公平指标影响的完整

分析。正如我们在图 1 中所展示的，在某一年中，选民可能强烈支持民主党总统候选人和共和党州长候选人。因此，在用于分析区划计划时，选举数据的选择会对选举结果产生重大影响。

为了分析这一问题并为评估计划提供额外内容，我们对数百万种可能的州参议院和执行委员会选区划分方案应用定量措施。这些集合叠加了上一个人口普查周期内发生的大选数据，使我们能够对当前实施的计划进行详细分析。然后，我们继续处理诉讼中提出的主张以及对该州潜在地图的其他相关评估。

2 方法

本节描述了生成集合的技术选择。大多数计算是在 Apple M2 CPU 上完成的，内存密集型任务则在达特茅斯的做布集群上执行，该集群是一个拥有 96 核 3.6GHz AMD Epyc 系统的设备。该项目使用 GerryChain 的 0.2.17 版本。

2.1 数据

该项目的数据来自度量几何与拆分选区小组 (MGGG) 的 github。选区几何图形来自新罕布什尔州全州地理信息系统资料中心 NH Granit，投票数据来自新罕布什尔州务卿的选举结果页面，人口数据则通过人口普查 API 获得。所有这些都打包在 MGGG github 页面上的 shapefiles 中。在这个项目中，我们使用 NH Granit 提供的当前州参议院和行政委员会选区的 shapefiles 更新了原有的 shapefiles。

在创建了一系列允许的选区划分方案后，使用投票数据来调查党派倾向。在计算重新划分选区的论文中，已形成良好实践是使用全州范围内的选举作为预测当地选举如何投票的指标 [26, 29]。但在新罕布什尔州，跨党派选举更为常见，因此选择使用哪个选举数据变得困难。在 2020 年的州长竞选中，共和党的克里斯·苏努诺以超过 30% 的优势击败了民主党的丹·费尔特斯，而在总统竞选中，乔·拜登以 7% 的优势击败唐纳德·特朗普。为了处理这一问题，本文将通过 8 个不同的选举来调查相同的集合，即 2012 年、2016 年和 2020 年的总统选举以及 2012 年、2014 年、2016 年、2018 年和 2020 年的州长选举。我们将分别称之为 PRES12、PRES16、PRES20、GOV12、GOV14、GOV16、GOV18 和 GOV20。

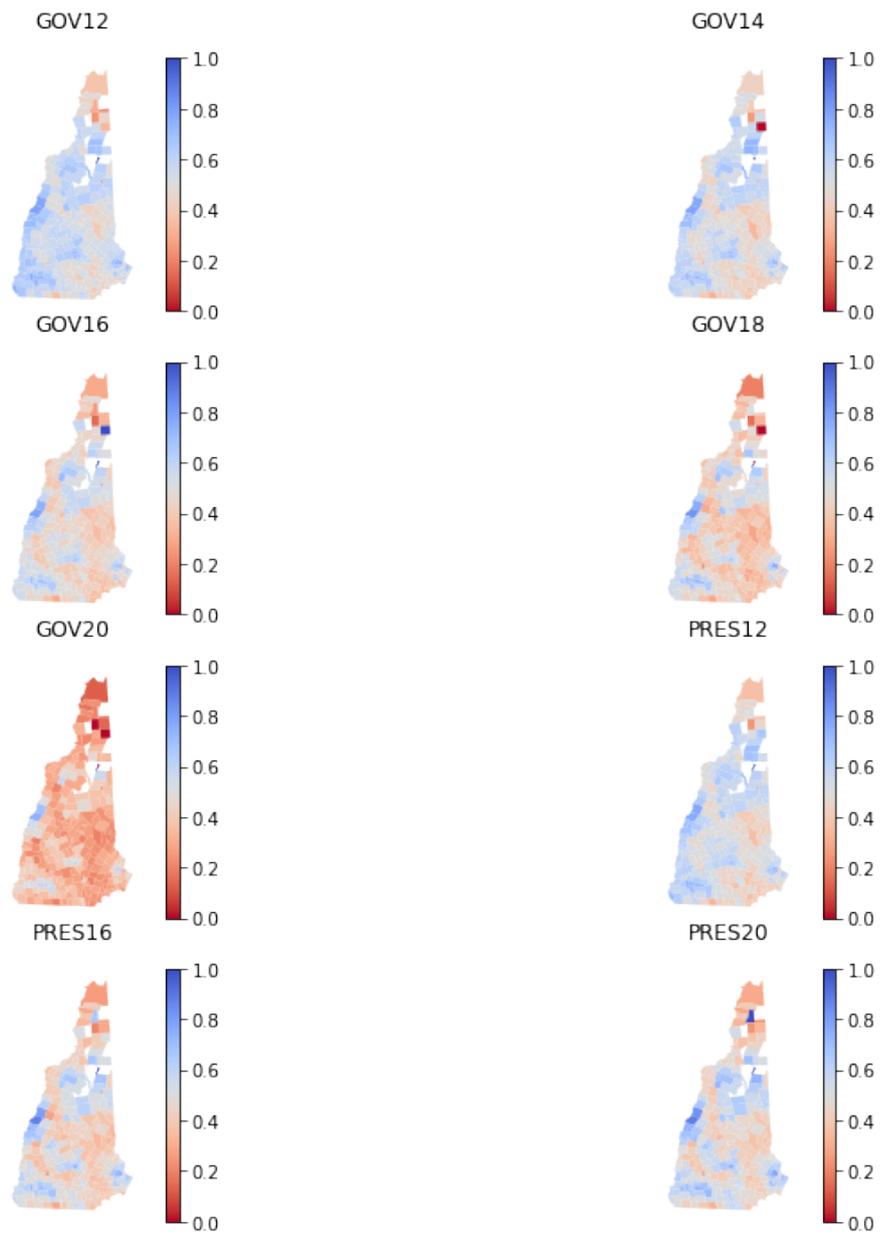


图 1 我们在本文中分析的选举中每个选区的投票份额。

2.2 马尔可夫链蒙特卡罗方法

要创建一个集成模型，首先必须构建状态对偶图。图中的每个节点代表一个选区，并且相邻的选区通过一条边连接。每个节点根据其人口进行加权，因此重新划分选区的问题就转化为在每个部分权重相等的约束下的图分割问题。

集合是通过重组算法 (RECOM) 生成的，该算法生成了一个分区的马尔可夫链。在每次迭代中，两个选区被合并，并且每条边都被随机加权。然后使用克鲁斯卡尔算法找到一个最大权重生成树，并且随机切割一条边，使得每个新选区满足正确的人口偏差。关于该算法的更深入讨论，请参阅 [34]。在本文中，州参议院的最大允许人口偏差设定为 5%，而执行委员会则为 1%。

新罕布什尔州要求选区由连贯的城镇、城市和分区组成，不得将其分割。因此我们采用了城镇权重；连接同一城镇内节点的边权重从 $[0, 4]$ 上的均匀分布中抽取，如果选区不在同一个城镇，则边权重从 $[0, 1]$ 上的均匀分布中抽取。带城镇权重的 RECOM 变体最初是在 [26] 中为县级加权提出的，在文中作者观察到县级加权将县的分割减少到了一个现实水平。对均匀分布的上限选择是为了平衡混合时间（城镇加权增加了链的刚性）和减少被分割的城镇数量。在图 2 中，展示了两个集合中的分裂数量，其中一个使用了带权重的城镇方法，另一个没有。

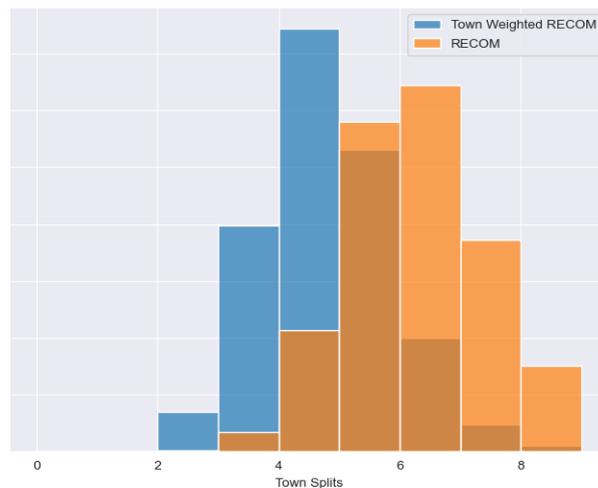


图 2 按权重分配城镇和不按权重分配城镇链中的分拆城镇数量。当前实施的计划有三个分拆城镇。

为了设定马尔可夫链的长度，我们依赖于两种混合的启发式方法。首先，为研究单个链的混合时间，计算了自协方差。如果链条足够长，那么一个好的停止时间选择是自协方差衰减到几乎为零所需时间的大倍数。第二种探索的启发式方法是多起点启发法；如果多个从不同起始位置开始运行的链收敛到同一个分布，则可以得出结论认为这些链已经运行了足够长时间。测量分布之间距离的方法有很多，但在本文中，我们采用了在 [26] 中建议的柯尔莫哥洛夫-斯米尔诺夫 (KS) 度量。KS 度量等同于两个样本累积分布函数上的无穷范数。因此，为每条链计算了经验分布，并且两个经验分布在 y 方向上的最大差异即为 KS 距离。

对于自协方差启发式方法，取一个非常长的样本（州参议院为 2000 万步，行政委员会为 500 万步），并将自协方差作为滞后时间的函数进行计算。对于多起点启发式方法，使用由 [34] 所述的二分树算法创建了十个种子，并将实施计划纳入第十一种子。然后，从每个种子开始运行链（州参议院为 1000 万步，行政委员会为 50 万步），并计算每对集合之间的 KS 距离。平均成对 KS 距离以及自协方差降至 0.01 以下的滞后时间包含在附录的表 1-4 中。

3 结果与分析

在本节中，我们描述了跨上一个普查周期的各种选举的集成分析结果，这些数据是在制定计划时可供线条绘制者使用的。

3.1 执行委员会

我们从执行委员会开始分析，该委员会将州划分为五个选区。我们首先将集合的紧凑性与已实施计划进行比较，然后再评估其党派属性。

3.1.1 紧性度量

我们分析了两个紧致性指标：Polsby-Popper 分数和割边的数量。Polsby-Popper 分数衡量的是一个形状的面积与其相同周长的圆的面积之比。它有一些已知的问题 [35]，但在政治科学家之间已被广泛接受 [8, 36]。割边是一种方便用于生成树方法的紧致性代理测量。有关割边作为紧致性代理的更详细探讨，请参阅 [37]。

图 3 显示了集合的 Polsby-Popper 分数和切割边。实施计划正好位于集合众数的平均 Polsby-Popper 分数上，但拥有更多的切割边。因此，该集合至少与实施计划一样紧凑。

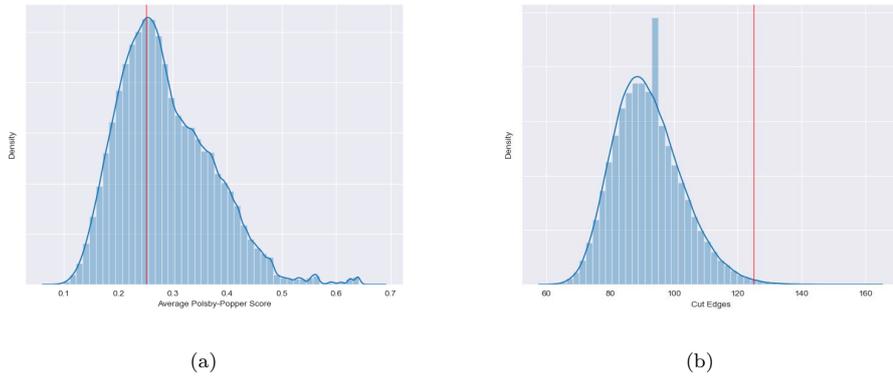


图 3 (a) 执行委员会选区的平均 Polsby-Popper 得分 (b) 执行委员会选区图中的割边数量

3.1.2 座位和胜率百分比

新罕布什尔州在选举结果中出现了巨大的波动（见图 1），即使是在同一张选票上的不同竞选之间也是如此。候选人的影响似乎比其他州更大，在这些州，分开投票的结果较少见。图 1 显示了我们在分析中的各次全州选举的得票率。这种变化性使得从单一选举中得出有意义的结论变得困难。我们遵循 [38]，研究所有最近的全州选举并寻找“防火墙”，这些模式可能看起来是对称的，但实际上在势均力敌的选举中编码了有偏的结果。此外，我们还调查和解释了计划中的党派对称性测量值。主要结果是被采纳的计划始终比整体更倾向于共和党。

在图 4(a) 中，我们展示了共和党赢得的席位。在赢幅较大的选举中，执行计划（红色）位于或处于集合（蓝色）的左侧，这表明民主党具有优势。在更为接近的选举中，执行计划位于集合的右侧，这表明共和党具有优势。这可能是共和党防火墙的早期迹象。

在图 4(b) 中，我们绘制了每个选区在 3 次代表性选举中的排序投票总数分布，如 [8, 26, 27, 29, 31, 32] 所示。在共和党票数份额最大和最小的选区中，共和党被低估了，而在中间选区中，共和党则被高估了。在一个像 PRES16 这样势均力敌的选举中，这种高估给共和党带来了优势。

3.1.3 党派对称性度量

本文研究了均值-中位数得分、效率差距和党派偏差。对于党派对称性度量的更详细讨论，请参见 [39]

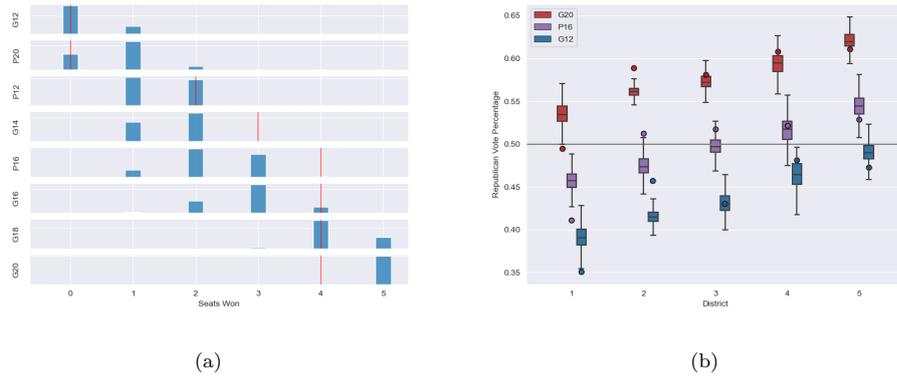


图 4 (a) 获得的行政委员会席位 (b) 按选区排序的行政委员会共和党获胜百分比

均值-中位数得分衡量的是一个政党在各选区的平均得票率减去其中位数得票率。正值表明该党可能面临不利局面。在我们的分析中，共和党的正均值-中位数得分意味着民主党有优势，而负值则表示共和党有优势。均值-中位数得分如图 5 所示。无论选举如何，现行计划的均值-中位数得分为负，表明共和党有优势。另一方面，集合均值-中位数得分呈正态分布，表明民主党略有优势。在均值-中位数得分的情况下，新罕布什尔州的政治几何编码了一点民主党的优势，但尽管如此，现行计划却明确编码了共和党的优势。

效率差距衡量的是各党派无效票数之间的差异。效率差距值显示在图 6 中，其中负值表示共和党的优势，正值表示民主党的优势。在大胜的情况下，实施的计划位于集合的右侧，表明民主党有优势，但在势均力敌的选举中，实施的计划则偏向于给共和党带来优势。

党派偏见分数反映了在一个假设的 50-50 选举中一个政党的优势。党派偏见分数随着席位数量成反比地增加或减少，从而导致离散的整体分布。正分表示民主党有优势，而负分则表示共和党有优势。在图 7 中，整体模式通常出现在约 0.1 处，表明计划倾向于编码民主党的优势。然而，实施的计划有利于共和党。

对党派对称性度量的分析支持这样的结论：所实施的计划比整体更有利于共和党人。

3.1.4 对各区的详细考察

对选票总数的分析表明，包括汉诺威、基恩和康科德等人口中心在内的第二选区被划给了民主党。图 8(a)-(c) 说明了这些城镇的选票总数，显示在每次选举中，共和党的得票率显著低于预期。例如，在 GOV20 选举中，尽管共和党候选人

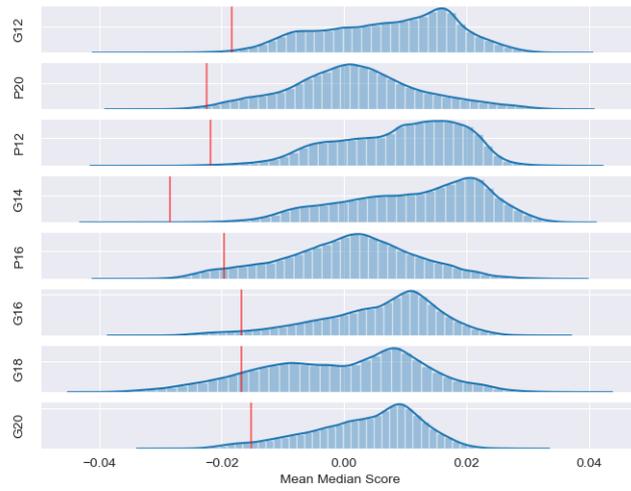


图 5 执行委员会各选举中的平均中位数得分。红线表示已实施计划的值，在每个研究的选举中都具有有利于共和党的数值。

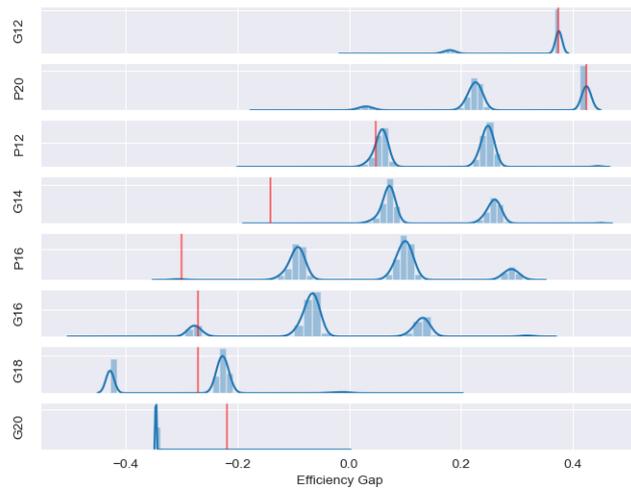


图 6 执行委员会效率差距跨选举分析。红线表示已实施计划的值。

松努以超过 30% 的优势赢得了普选，民主党人仍然拿下了该选区。这解释了为什

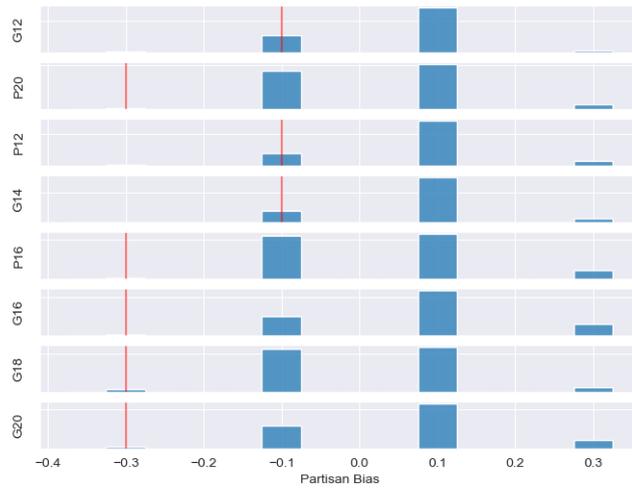


图 7 执行委员会 跨选举的党派偏见

么此次选举的效率差距有利于民主党；即使共和党取得重大胜利，被划给民主党的选区仍能让民主党确保获得席位。

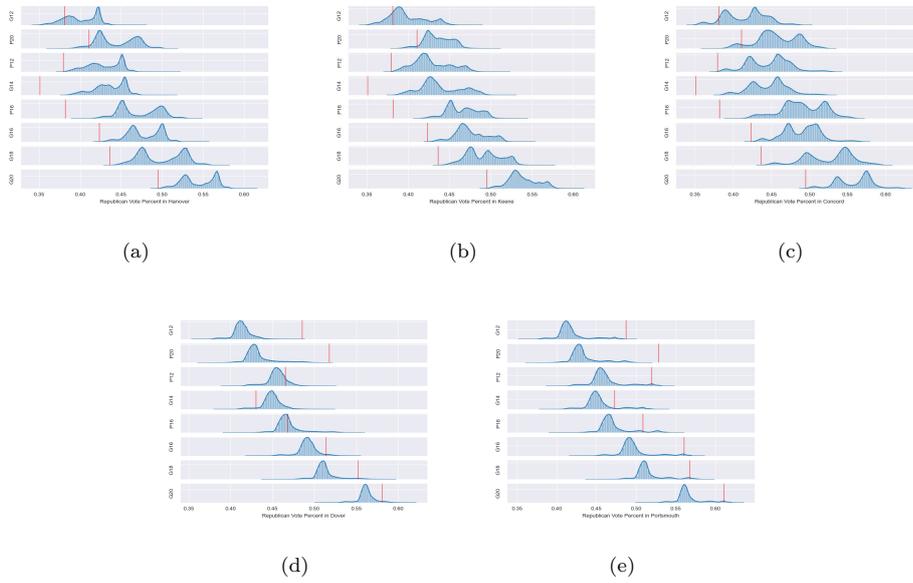


图 8 汉诺威 (a)、基恩 (b)、孔克德 (c)、多佛 (d)、朴次茅斯 (e) 所在选区的共和党得票率百分比

其他有代表性的选区包括朴茨茅斯和多佛，其投票总数分别绘于图 8(d) 和 8(e) 中。这里趋势相反：在朴茨茅斯，实施的计划给予共和党比集合模式更高的票数，而多佛选区也遵循类似的模式。

此分析支持了在 [33] 中提出的主张。律师们认为康科德和基恩的人口中心被不自然地与左倾的西部边界分组在一起。我们的研究结果显示，在实施计划中，汉诺威、基恩和康科德的共和党选票总数远低于集合中的数值。这种分组剥夺了其他选区的民主党支持，这一点在多佛尔和朴茨茅斯尤为明显，在这两个地方，实施计划使得共和党的选票比例超过了 50%。

另一个观察结果是选票总数的双峰分布。汉诺威靠近佛蒙特州边境，可以被划入更加倾向共和党的北部地区（如同 2010 年的计划），或者更倾向民主党的东南部地区（如同 2020 年的计划）。同样的逻辑也可以应用于康科德。即使考虑到这种多模态性，所实施的方案仍显得是一个异常值，表明选择向哪个方向扩展包含汉诺威的选区并不足以解释与整体偏差之间的全部差异。

3.2 州参议院

我们还对新罕布什尔州参议院进行了类似的分析，该参议院有 24 个选区。

3.2.1 紧致性度量

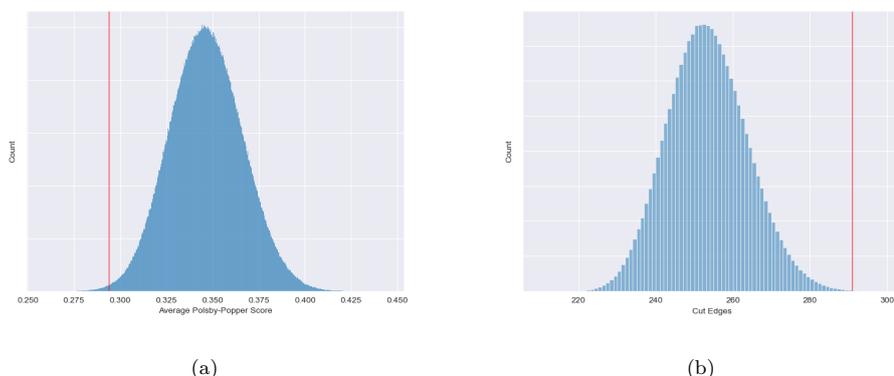


图 9 (a) 各州参议院选区的平均 Polsby-Popper 得分 (b) 被切割的边的数量

如图 9 所示，集合的紧凑性与实施计划之间的关系取决于所选择的度量标准；该集合比实施计划具有更少的切割边和更高的平均 Polsby-Popper 分数。

3.2.2 席位和获胜百分比

在图 10(a) 中，我们观察到类似的行为模式与执行委员会相似。在胜利优势较大的选举中，已实施的计划对民主党有利，而在势均力敌的选举中，已实施的计划则对共和党有利。

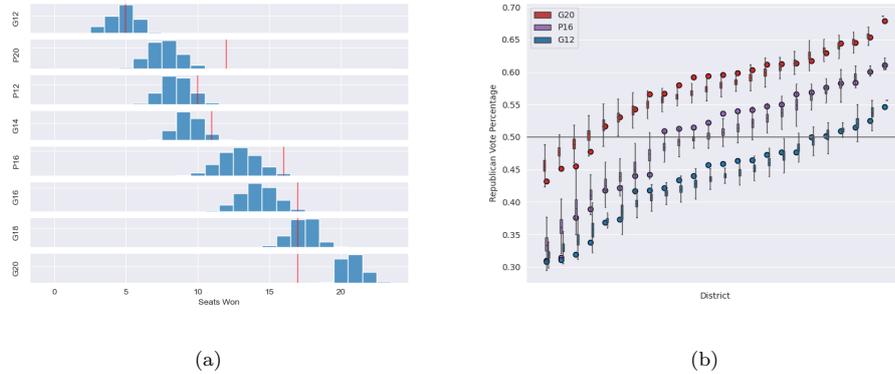


图 10 (a) 获得的州参议院席位 (b) 按选区排序的州参议院共和党胜率百分比

每个选区的投票总数如图 10(b) 所示。在最倾向共和党和最少倾向共和党的选区中，集合中的共和党票数总额低于已实施计划中的票数总额，但在中间部分，已实施计划的票数则高于集合中的票数。在类似 GOV12 和 GOV20 这样的压倒性选举中，这并不意味着大量的席位交换，因为中间选区的竞争并不激烈。然而，在像 PRES16 那样势均力敌的选举中，中间选区的投票比例大约为 50%，因此在这些选区中的过度代表直接转化为赢得席位数量上的过度代表。

这表明实施计划中存在一种不对称性；当共和党在全州投票中获得微弱胜利 (GOV16) 时，实施的计划会产生大量的席位胜利，但当民主党在全州投票中获得微弱胜利 (PRES16 或 PRES20) 时，共和党仍然保持多数席位。

3.2.3 党派对称性度量

这一结论得到了均值-中位数得分的支持。在图 11(a) 中，实施的计划位于集合中的共和党倾向尾部。政党偏差与均值-中位数得分一致；实施的计划一贯偏向共和党，并且超出典型范围，如图 11(b) 所示。

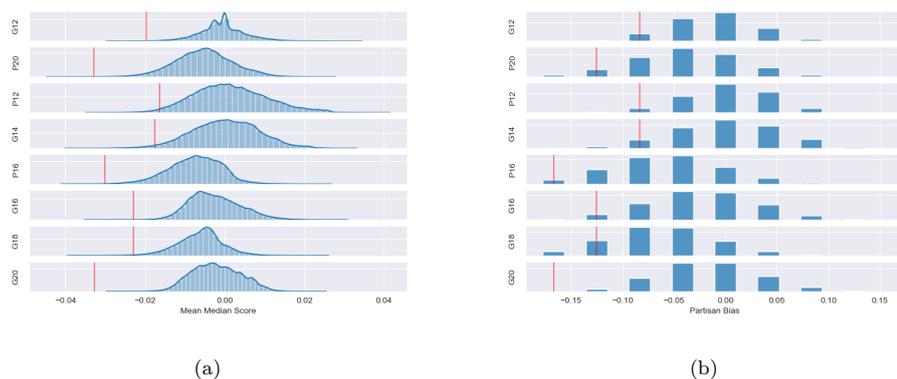


图 11 州参议院平均中位数得分 (a) 和党派偏见得分 (b) 在不同选举中的分布

效率差距，如图 12 所示，与行政委员会的结果类似。在接近的选举中，生效计划位于倾向于共和党的一端，而在大比例获胜的选举中，生效计划则落在分布的中间或倾向于民主党的一侧。

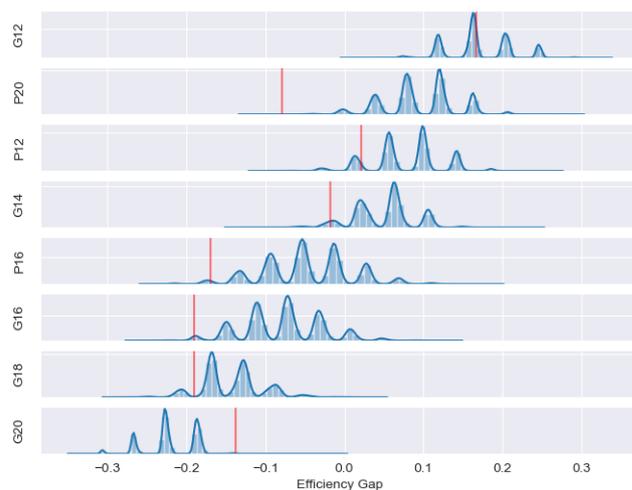


图 12 州参议院选举中的效率差距变化

我们得出结论，在广泛范围的选举数据和指标中，实施的计划比整体组合编码了更大的共和党偏见。

4 结论与进一步工作

此处提出的分析支持这样一种论点，即新罕布什尔州参议院和执行委员会的选区图可能是出于党派利益而绘制的，因为实施计划的价值通常与集合中观察到的价值相比是异常值。在执行委员会中，党派对称度量指向共和党的优势。汉诺威、基恩和康科德的典型投票总数调查表明，在第二选区存在集中现象。类似的结论也适用于州参议院，其中实施计划在党派对称性度量上是倾向于共和党的异常值。这些结果即使考虑到导致投票分布双峰配置的具体城市位置仍然成立。

我们的结果验证了布朗诉斯坎兰案中的一些主张 [33]。在行政委员会中，存在将民主党人集中在一个选区以增加共和党人在该州其他地区代表人数的模式。在州参议院中，中部选区的民主党代表人数低于该州典型的水平；在接近的选举中，这可能会导致共和党的胜利比例过大。

为本研究开发的集成模型具有超出当前分析范围的影响。通过一个非党派过程生成给定状态的“典型”地图基线，该集成提供了一个标准，用于衡量任何可能的地图。这种方法不仅帮助研究人员识别何时存在选区划分操控（如在本工作中），而且还促进了更公平地图的创建。政策制定者和法院可以在中立、由集成创建的基准背景下制作和分析地图，实际上是对地图进行党派性预检查。通过这种方式，集成具有双重目的；它可以作为诊断工具来检测党派性的选区划分操控，同时促进那些表现良好且不依赖复杂且常常定义不清的标准的地图。

在从这些空间中取样时，对重组算法 [40, 41] 进行采样的新方法可以使研究人员能够针对特定的分布进行研究，这是目前方法的一种改进，因为目标分布是未知的 [42]。通过明确设定一个目标分布，研究人员可以调查不同的重划区标准之间的权衡和影响。例如，可以调查严格执行市政边界是否会让共和党受益，因为民主党选民被压缩到少数几个高票数的选区中，这种现象在一些政党偏见分析 [43] 中观察到过。此外，尽管在抽样单一成员选区方面取得了进展，但在从多成员和流动选区（如新罕布什尔州国会）中取样的差距仍然存在。解决这些差距可以进一步弥合理论重划区研究与实际政策应用之间的鸿沟。

附录 A 马尔可夫链的混合启发式方法

下表展示了我们用于创建集合的马尔可夫链的混合诊断结果。评估混合使用的两个关键启发式方法是：自相关衰减和从不同初始状态开始的链之间的成对 Kolmogorov-Smirnov (KS) 距离。

表格 A3 和 A2 包含自相关滞后时间。我们计算了链的非常长的运行（州参议院为 2000 万，执行委员会为 500 万）的自相关性，以确定自相关性降至 0.01 以下的步数。这些值在表格中报告。该值提供了估计链“忘记”其过去所需的时间。

表格 A4 和 A1 包含成对的 KS 距离。为了验证从不同起始点的收敛性，从随机初始化开始启动 10 个链，并且经过许多步骤（州参议院为 1000 万步，执行委员会为 50 万步）后计算每个链之间的成对 KS 距离。这些距离的平均值在表格中报告。当一个链混合良好时，无论起始点如何都会收敛到相同的分布，因此平均成对 KS 距离较低。

这些诊断支持我们选择链长的合理性，通过展示在两种启发式方法下链均已充分混合。

	1	2	3	4	5
GOV12	0.00421591	0.00740787	0.00592862	0.0056296	0.00729267
GOV14	0.00521844	0.00735707	0.00549542	0.0057540	0.00831342
GOV16	0.00481853	0.00638791	0.00508871	0.00571370	0.00803164
GOV18	0.0052032	0.00770453	0.00496964	0.00530796	0.00781342
GOV20	0.00431796	0.00693604	0.00498222	0.00588907	0.00838267
PRES12	0.00426382	0.00586973	0.00512138	0.00611364	0.00789938
PRES16	0.00602307	0.00729373	0.0047844	0.00586324	0.00732449
PRES20	0.00691218	0.0071284	0.00433191	0.00664844	0.0071012

表 A1 5 个行政委员会选区的平均成对 KS 统计量，按共和党总票数从少到多排序

	1	2	3	4	5
GOV12	114.4	154.3	128.5	126.9	125.1
GOV14	94.9	158.7	143.4	122.5	170.3
GOV16	94.4	126.9	123.8	110.0	144.3
GOV18	116.4	143.2	114.4	127.0	139.3
GOV20	128.0	124.0	124.5	101.5	130.4
PRES12	116.1	146.5	146.5	108.2	139.3
PRES16	125.1	158.1	113.6	143.3	144.5
PRES20	145.9	153.7	85.0	163.4	144.0

表 A2 达到选区排序后的共和党投票总数自相关性低于 0.01 的平均滞后时间

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
GOV12	1238	2106	1938	2266	5943	598334	619214	359260	81182	3973	3548	18432	299427	157038	140101	107504	6353	6550	481545	846727	739880	260004	45822	217574
GOV14	1338	2024	2230	2388	3761	2091	2709	3756	21275	587841	672552	737484	708065	401450	121412	3096	633752	378601	304930	652298	805534	572029	665801	629772
GOV16	1984	1986	2418	2185	144573	633151	516985	122764	45728	84260	121140	152219	118631	74467	118445	14891	66633	220771	582556	691532	750305	777262	493579	232332
GOV18	1493	2163	2249	4800	359145	711639	142440	3772	3350	3156	3297	3641	25259	16811	17823	5935	67646	698479	823914	758746	151013	7507	9516	6266
GOV20	2017	2610	2194	2530	228560	663307	119787	4718	3708	6162	219228	358394	342834	272790	71890	9434	81905	119103	545861	751809	774981	781654	24042	247420
PRES12	1224	1950	1821	2237	104879	293840	283439	414518	579565	580611	428415	227647	32917	19806	125947	134463	9619	16255	514178	824383	840295	190794	394800	221026
PRES16	2535	2168	5279	8925	268173	466493	8651	4563	102687	373336	490866	252351	34355	6558	3592	5716	239417	573644	689886	628293	539205	157697	10662	72353
PRES20	2958	2304	5198	17602	479412	542392	6468	67669	567680	638801	597633	181521	5180	4562	56705	285757	407353	606716	625285	420508	335653	29033	7357	12449

表 A3 达到选区排序后的共和党投票总数自相关低于 0.01 的平均滞后时间

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
GOV12	0.00746421	0.00738492	0.0059108	0.00820326	0.03166541	0.05272608	0.0690287	0.04742722	0.03170964	0.01596767	0.01942463	0.03570441	0.05301232	0.04947304	0.04840355	0.04973123	0.02962903	0.02415266	0.07593755	0.12276848	0.12152078	0.04807615	0.06103478	0.09263022
GOV14	0.00629292	0.00561628	0.00661108	0.00727118	0.00979322	0.00648313	0.01618599	0.0162338	0.0287922	0.04952341	0.07450262	0.08116974	0.07982718	0.05546073	0.02692621	0.03167879	0.08097977	0.06322768	0.04422766	0.08880088	0.12140145	0.10255346	0.09821423	0.15932963
GOV16	0.00806536	0.00723338	0.00757485	0.02590664	0.05643081	0.05181119	0.0740228	0.03565294	0.02256418	0.02169706	0.0275604	0.03160729	0.04555741	0.06075286	0.04683201	0.03238795	0.0403435	0.04272124	0.05615057	0.10367346	0.14525651	0.08847478	0.08245241	0.1628076
GOV18	0.00724243	0.00576409	0.00741841	0.02082957	0.04769098	0.04432386	0.04148392	0.01132091	0.01120564	0.02078481	0.03685532	0.04873831	0.03918444	0.04060777	0.039093848	0.02969813	0.03915364	0.08377632	0.10849367	0.11246157	0.05638086	0.02856568	0.04614668	0.08091433
GOV20	0.00839746	0.00718508	0.00654122	0.01392847	0.04483915	0.07866748	0.04700421	0.01478506	0.00828353	0.01292386	0.02959439	0.04010098	0.05721086	0.06578272	0.04671448	0.02765584	0.03888515	0.0423092	0.06207832	0.10474533	0.09647605	0.11799778	0.05010955	0.14629076
PRES12	0.00637057	0.0072771	0.00607774	0.02107175	0.05331691	0.04130823	0.03011342	0.04708978	0.0597832	0.05462279	0.05257504	0.0374573	0.03315634	0.03846967	0.04630505	0.05145654	0.04699867	0.0285254	0.0542849	0.12423302	0.12767322	0.0973963	0.07392876	0.0925786
PRES16	0.00867873	0.00933213	0.01049136	0.0286223	0.04620154	0.06422188	0.03704703	0.01846614	0.02977595	0.04283395	0.06101838	0.06619397	0.05005875	0.0278989	0.02420644	0.02499964	0.03618181	0.05087962	0.11576503	0.1036124	0.07112142	0.0616693	0.05927408	0.07916322
PRES20	0.00776663	0.00808934	0.01082212	0.03317619	0.05978789	0.0755572	0.03007401	0.03696558	0.05336268	0.05729177	0.0632198	0.04931742	0.03536015	0.02968275	0.03414217	0.03657057	0.03742854	0.06358969	0.1248624	0.06893066	0.06500145	0.0503125	0.0476214	0.05822621

表 A4 24 个州参议院选区的平均成对 KS 统计量，按共和党得票总数从少到多排序

References

- [1] Becker, A., Solomon, J.: Redistricting Algorithms. In: Duchin, M., Walch, O. (eds.) *Political Geography*, pp. 303–340. Birkhäuser, Cham (2020). Chap. 16
- [2] Clelland, J., DeFord, D., Duchin, M.: Aftermath: The Ensemble Approach to Political Redistricting. *Math Horizons* **27**(3), 34–35 (2020) <https://doi.org/10.1080/10724117.2019.1680187>
- [3] Barnes, R., Solomon, J.: Gerrymandering and Compactness: Implementation Flexibility and Abuse. *Political Analysis* **29**(4), 448–466 (2021) <https://doi.org/10.1017/pan.2020.36>
- [4] Assaf Bar-Natan, L.N., Schutzman, Z.: The Gerrymandering Jumble: Map Projections Permute Districts’ Compactness Scores. *Cartography and Geographic Information Science* **47**(4), 321–335 (2020) <https://doi.org/10.1080/15230406.2020.1737575>
- [5] Duchin, M., Tenner, B.E.: Discrete Geometry for Electoral Geography. *Political Geography* **109**, 103040 (2024) <https://doi.org/10.1016/j.polgeo.2023.103040>
- [6] Harper, R., Osteroff, A., Rumph, Balla, R. Crews, Quick, Cohen, j., Rush, Dunn, j., S. Peters, Barnes, Brien, Brown: Harper v. Hall. Supreme Court of North Carolina Tenth District (No. 413P21) (2023)
- [7] Harper, R., Osteroff, A., Rumph, Balla, R. Crews, Quick, Cohen, j., Rush, Dunn, j., S. Peters, Barnes, Brien, Brown: Harper v. Hall. Supreme Court of North Carolina Tenth District (No. 413PA21) (2023)
- [8] Herschlag, G., Kang, H.S., Luo, J., Graves, C.V., Bangia, S., Ravier, R., Mattingly, J.C.: Quantifying Gerrymandering in North Carolina. *Statistics and Public Policy* **7**(1), 30–38 (2020) <https://doi.org/10.1080/2330443X.2020.1796400>
- [9] Grofman, B.: Measures of Bias and Proportionality in Seats-Votes Relationships. *Political Methodology* **9**(3), 295–327 (1983)

- [10] Katz, J.N., King, G., Rosenblatt, E.: Theoretical Foundations and Empirical Evaluations of Partisan Fairness in District-Based Democracies. *American Political Science Review* **114**(1), 164–178 (2020) <https://doi.org/10.1017/S000305541900056X>
- [11] Bernstein, M., Duchin, M.: A Formula Goes to Court: Partisan Gerrymandering and the Efficiency Gap. *Notices of the American Mathematical Society* **64**(9) (2017)
- [12] Stephanopoulos, N., McGhee, E.: Partisan Gerrymandering and the Efficiency Gap. *University of Chicago Law Review* **82**(2), 831–900 (2014)
- [13] Veomett, E.: Efficiency Gap, Voter Turnout, and the Efficiency Principle. *Election Law Journal* **17**(4), 249–263 (2020) <https://doi.org/10.1089/elj.2018.0488>
- [14] Campisi, M., Ratliff, T., Padilla, A., Veomett, E.: Declination as a Metric to Detect Partisan Gerrymandering. *Election Law Journal* **18**(4), 371–387 (2019) <https://doi.org/10.1089/elj.2019.0562>
- [15] Warrington, G.S.: Quantifying Gerrymandering Using the Vote Distribution. *Election Law Journal: Rules, Politics, and Policy* **17**(1), 39–57 (2018) <https://doi.org/10.1089/elj.2017.0447>
- [16] Eubank, N., Rodden, J.: Who is my Neighbor? The Spatial Efficiency of Partisanship. *Statistics and Public Policy* **7**(1), 87–100 (2020) <https://doi.org/10.1080/2330443X.2020.1806762>
- [17] DeFord, D., Eubank, N., Rodden, J.: Partisan Dislocation: A Precinct-Level Measure of Representation and Gerrymandering. *Political Analysis* **30**(3), 403–425 (2022) <https://doi.org/10.1017/pan.2021.13>
- [18] Barton, J., Eguia, J.X.: Central Advantage: A Geographic Measure of Partisan Fairness in Redistricting. *Journal of Empirical Legal Studies* (To Appear) <http://dx.doi.org/10.2139/ssrn.5045573>
- [19] Wise, G.M.: One Person, One District: A Democratically Derived Standard

- of Maximum Disproportionality. *Election Law Journal: Rules, Politics, and Policy* (To Appear) <https://doi.org/10.1089/elj.2024.0068>
- [20] Campisi, M., Ratliff, T., Somersille, S., Veomett, E.: Geography and Election Outcome Metric: An Introduction. *Election Law Journal* **21**(3), 200–219 (2022) <https://doi.org/10.1089/elj.2021.0054>
- [21] DeFord, D., Dhamankar, N., Duchin, M., Gupta, V., McPike, M., Schoenbach, G., Sim, K.W.: Implementing partisan symmetry: Problems and paradoxes. *Political Analysis* **31**(3), 305–324 (2023) <https://doi.org/10.1017/pan.2021.49>
- [22] DeFord, D., Veomett, E.: Bounds and Bugs: The Limits of Symmetry Metrics to Detect Partisan Gerrymandering. *Election Law Journal: Rules, Politics, and Policy* (To Appear) <https://doi.org/10.1089/elj.2024.0038>
- [23] Duchin, M., Gladkova, T., Henninger-Voss, E., Klingensmith, B., Newman, H., Wheelen, H.: Locating the Representational Baseline: Republicans in Massachusetts. *Election Law Journal: Rules Politics, and Policy* **18**(4), 338–401 (2018) <https://doi.org/10.1089/elj.2018.0537>
- [24] Duchin, M., Schoenbach, G.: Redistricting for Proportionality. *The Forum* **20**(3-4), 371–393 (2022) <https://doi.org/10.1515/for-2022-2064>
- [25] Kagan, E.: *Common Cause v. Rucho*. The Middle District of North Carolina (No. 1:16-CV-1026) (2019)
- [26] Clelland, J., Colgate, H., DeFord, D., Malmskog, B., Sancier-Barbosa, F.: Colorado in Context: Congressional Redistricting and Competing Fairness Criteria in Colorado. *Journal of Computational Social Science* **5**, 180–226 (2021) <https://doi.org/10.1007/s42001-021-00119-7>
- [27] Caldera, S., DeFord, D., Duchin, M., Gutekunst, S.C., Nix, C.: Mathematics of Nested Districts: The Case of Alaska. *Statistics and Public Policy* **7**(1), 39–51 (2020) <https://doi.org/10.1080/2330443X.2020.1774452>
- [28] Carter, D., Hunter, Z., Teague, D., Herschlag, G., Mattingly, J.: Optimal

- Legislative County Clustering in North Carolina. *Statistics and Public Policy* **7**(1), 19–29 (2020) <https://doi.org/10.1080/2330443X.2020.1748552>
- [29] DeFord, D., Duchin, M.: Redistricting Reform in Virginia: Districting Criteria in Context. *Virginia Policy Review* **12**(2), 120–146 (2019)
- [30] Dobbs, K.W., Swamy, R., King, D.M., Ludden, I.G., Jacobson, S.H.: An Optimization Case Study in Analyzing Missouri Redistricting. *INFORMS Journal on Applied Analytics* **54**(2) (2023) <https://doi.org/10.1287/inte.2022.0037>
- [31] Herschlag, G., Ravier, R., Mattingly, J.C.: Evaluating Partisan Gerrymandering in Wisconsin. arXiv:1709.01596 [physics, stat] (2017)
- [32] Zhao, Z., Hettle, C., Gupta, S., Mattingly, J., Randall, D., Herschlag, G.: Mathematically Quantifying Non-responsiveness of the 2021 Georgia Congressional Districting Plan. In: Proceedings of the 2nd ACM Conference on Equity and Access in Algorithms, Mechanisms, and Optimization. EAAMO '22. Association for Computing Machinery, New York, NY, USA (2022). <https://doi.org/10.1145/3551624.3555300>
- [33] Brown, M., Crooker, E., Fajardo, C., Hackmann, K., Hay, B., Herzog, P., Hunt-Hawkins, P., Mooshian, M., Murphy, M., Norelli, T., Quevedo, N., Ward, J.: Brown v. Scanlan. Hilsborough Superior Court, Southern District (No. 226-2022-CV-00181) (2022)
- [34] DeFord, D., Duchin, M., Solomon, J.: Recombination: A Family of Markov Chains for Redistricting. *Harvard Data Science Review* **3**(1) (2021) <https://hdsr.mitpress.mit.edu/pub/1ds8ptxu>
- [35] DeFord, D., Lavenant, H., Schutzman, Z., Solomon, J.: Total Variation Isoperimetric Profiles. *SIAM Journal on Applied Algebra and Geometry* **3**(4), 585–613 (2019) <https://doi.org/10.1137/18M1215943>
<https://doi.org/10.1137/18M1215943>
- [36] Moncrief, G.F.: Reapportionment and Redistricting in the West, p. 27. Lexington Books, Lanham, MD (2011)

- [37] Duchin, M.: Explainer: Compactness by the Numbers. In: Political Geometry, pp. 29–36. Birkhäuser, Cham (2022). Chap. 1
- [38] Herschlag, G.: Firewalls. Accessed 10-31-2023 (2018). <https://sites.duke.edu/quantifyinggerrymandering/2018/01/30/firewalls/>
- [39] Bernstein, M., Walch, O.: Measuring Partisan Fairness. In: Political Geometry, pp. 39–76. Birkhäuser, Cham (2022). Chap. 2
- [40] Autry, E., Carter, D., Herschlag, G.J., Hunter, Z., Mattingly, J.C.: Metropolized Forest Recombination for Monte Carlo Sampling of Graph Partitions. *SIAM Journal on Applied Mathematics* **83**(4), 1366–1391 (2023) <https://doi.org/10.1137/21M1418010>
- [41] Autry, E.A., Carter, D., Herschlag, G.J., Hunter, Z., Mattingly, J.C.: Metropolized Multiscale Forest Recombination for Redistricting. *Multiscale Modeling & Simulation* **19**(4), 1885–1914 (2021) <https://doi.org/10.1137/21M1406854>
- [42] Cannon, S., Duchin, M., Randall, D., Rule, P.: Spanning Tree Methods for Sampling Graph Partitions. arXiv (2022) [arXiv:2210.01401](https://arxiv.org/abs/2210.01401) [physics.soc-ph]
- [43] Chen, J., Rodden, J.: Unintentional Gerrymandering: Political Geography and Electoral Bias in Legislatures. *Quarterly Journal of Political Science* **8**(3), 239–269 (2013) <https://doi.org/10.1561/100.00012033>